**СОДЕРЖАНИЕ**

[**1. Общее представление о сущности процессов, протекающих в исследуемой динамической системе.** 2](#_Toc143295083)

[**2. Представление общей структуры и принципов функционирования системы в графической форме.** 2](#_Toc143295084)

[**3. Описание физических процессов, протекающих в исследуемой системе.** 3](#_Toc143295085)

[**4. Перечень входных и выходных сигналов.** 3](#_Toc143295086)

[**5. Перечень управляющих и возмущающих воздействий.** 3](#_Toc143295087)

[**6. Гипотезы, используемые при построении модели.** 3](#_Toc143295088)

[**7. Статическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.** 3](#_Toc143295089)

[**8. Динамическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.** 5](#_Toc143295090)

[**9. Исследование динамики системы численным методом при различных входных воздействиях.** 5](#_Toc143295091)

[**10. Уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.** 9](#_Toc143295092)

[**11. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.** 10](#_Toc143295093)

[**12. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в относительных безразмерных величинах.** 11](#_Toc143295094)

[**13. Передаточная функция системы.** 11](#_Toc143295095)

[**14. Переходная и весовая характеристики системы.** 13](#_Toc143295096)

[**15. Показатели качества переходного процесса.** 17](#_Toc143295097)

[**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ** 19](#_Toc143295098)

# **1. Общее представление о сущности процессов, протекающих в исследуемой динамической системе.**

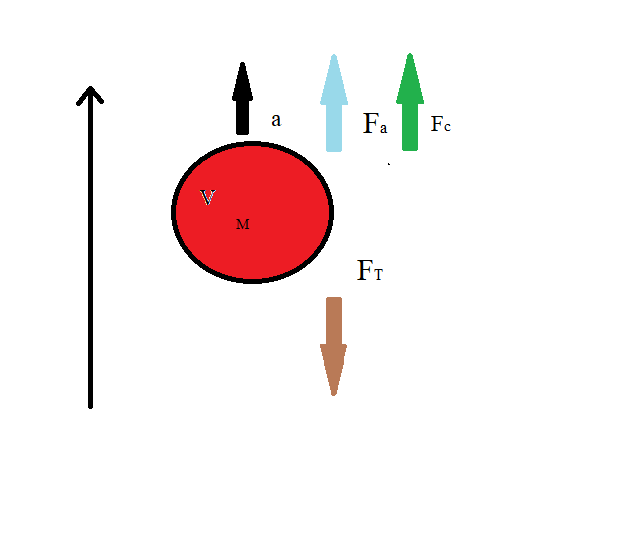
Изучается процесс подъема шара в воздух. Рассматривается воздушный шар, поднимающийся в воздух под действием силы Архимеда. Опыт будет происходить при нормальном условиях, ветер отсутствует.

Воздушный шар­­­­– это шар, плавающий в воздухе под действием силы Архимеда. Шар наполняется каким-либо газом, который легче воздуха что позволяет ему плавать в воздухе. Шар поднимается до тех пор, пока сила Архимеда и силы тяжести не уравновесят друг друга, то есть плотности газа внутри шара и вне шара не станут эквивалентными.

Ограничимся рассмотрением движения его центра масс под действием следующих сил: силы тяжести, архимедовой силы и силой аэродинамического сопротивления. Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена «против движения».

# **2. Представление общей структуры и принципов функционирования системы в графической форме.**

Графическая иллюстрация рассматриваемого процесса:



V— объем шара;

Fт — сила тяжести;

Fа — сила Архимеда;

Fс — сила сопротивления воздуху.

M — масса оболочки.

a — ускорение.

# **3. Описание физических процессов, протекающих в исследуемой системе.**

Воздушный шар сферической формы поднимается в воздух под действием сил Архимеда. Газ в шаре греется, в следствии чего его объем увеличивается и шар начинает подъем. Шар поднимается до тех пор, пока сила Архимеда и силы тяжести не уравновесят друг друга, то есть плотности газа внутри шара и вне шара не станут эквивалентными. Или же, другими словами, его вытесняет наверх до тех пор, пока вес, заключённый в его объёме, не будет равняться такому же весу воздуха, способного занять данный объём. Кроме того, при подъеме в воздух, воздух создаёт дополнительный тормозящий эффект.

# **4. Перечень входных и выходных сигналов.**

При поднятии в воздух объем шара будет изменяться поэтому — входной сигнал, а — выходной сигнал.

# **5. Перечень управляющих и возмущающих воздействий.**

Управляющим воздействием системы будет объем шара , возмущающим – температура окружающей среды .

# **6. Гипотезы, используемые при построении модели.**

Сформулируем перечень гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования:

* движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g;
* мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус;
* динамика объекта моделирования описывается уравнениями классической механики Ньютона;
* система изолирована от внешних воздействий.

# **7. Статическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.**

Статическая модель — это модель, отражающая состояние системы в некоторый фиксированный момент времени.

Найдём эту модель, приравняв все производные выходной величины к нулю.

В начале построим математическую модель нашей исследуемой системы.

Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена «против движения», поэтому корректный учет этой силы в уравнениях движения требует введения множителя .

Однако, для наших целей этот факт не имеет принципиального значения, и мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус.  Зависимость плотности воздуха от высоты будем полагать экспоненциальной:

,

,

Или же имеем из этого:

1. Масса шара;
2. Высота, с которой поднимается шар;
3. ;
4. ;
5. Коэффициент сопротивления воздуху

Статическая модель:

Или же:

# **8. Динамическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.**

Динамическая модель — это модель, отражающая процесс изменения состояния исследуемой системы.

Начальные условия будут иметь вид:

Таким образом, исходная задача свелась к решению задачи Коши для системы уравнений:

# **9. Исследование динамики системы численным методом при различных входных воздействиях.**

В рассматриваемом случае применение имитационного моделирования является необходимым, так как рассматриваемый процесс является достаточно сложным. Поэтому будем искать численное решение поставленной задачи с использованием методов вычислительной математики.

Для решения задачи Коши воспользуемся методом Эйлера. При этом значение производной может быть приближенно заменено отношением:

Здесь — значение функции в текущей точке, — значение функции в следующей точке, а величина равна интервалу времени между двумя отсчётами и называется **шагом интегрирования**.

Перейдя от дифференциальных уравнений к разностным, получим

Откуда в явном виде выразим значение функции в следующей точке:

Полученные соотношения позволяют определить значения искомых функций в последующий момент времени, зная их значения в предыдущий момент времени.

Исследуем зависимость получаемых решений задачи от различных входных воздействий.

Выберем для определённости следующие параметры процесса:

1. Масса шара ;
2. Высота, с которой поднимается шар ;
3. ;
4. Плотность воздуха ;
5. Коэффициент сопротивления воздуху.

Исследуем, как зависит угол наклона маятника от силы, оказываемой на маятник. На рисунке 1 показаны графики для трёх значений объема , , при начальных условиях и .

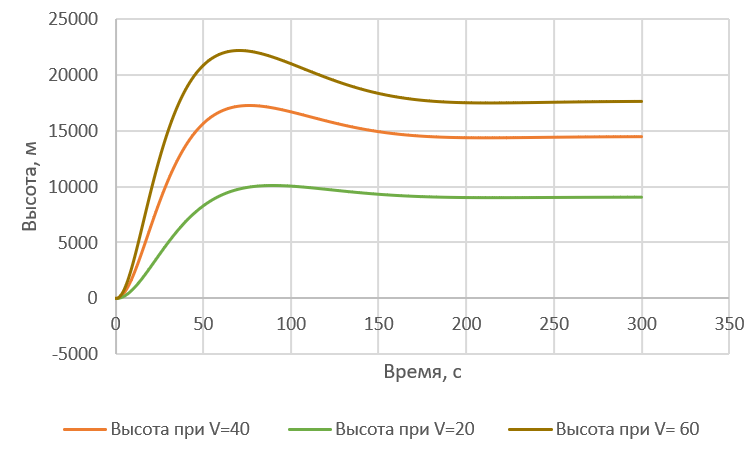


Рисунок 1 — Графики изменения высоты при различных значениях объема шара

Графики отчётливо иллюстрирует зависимость высоты, на которую поднимется шар от его объема.

Построим графики с теми же параметрами, но с другим начальным условием. На рисунке 1 показаны графики для трёх значений объема , , при начальных условиях и .

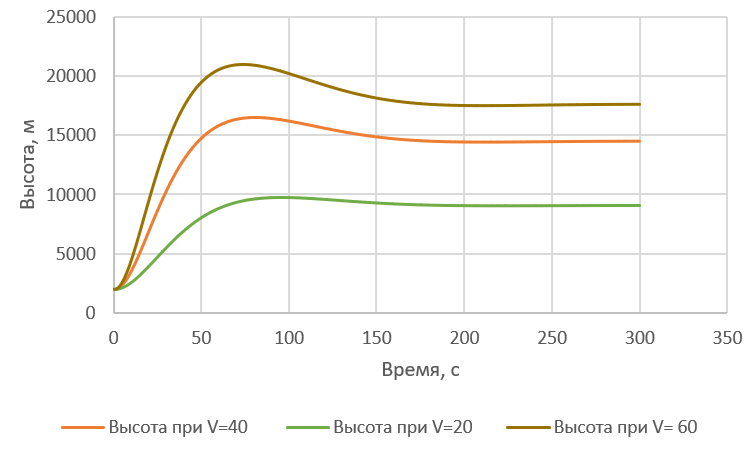


Рисунок 2 — Графики изменения высоты при различных значениях объема шара

Напрашивается вывод, что начальная высота не зависит от установившегося значения.

Далее, исследуем, как зависит высота шара зависит от его массы. На рисунке 3 показаны графики для трёх значений массы при начальном условии

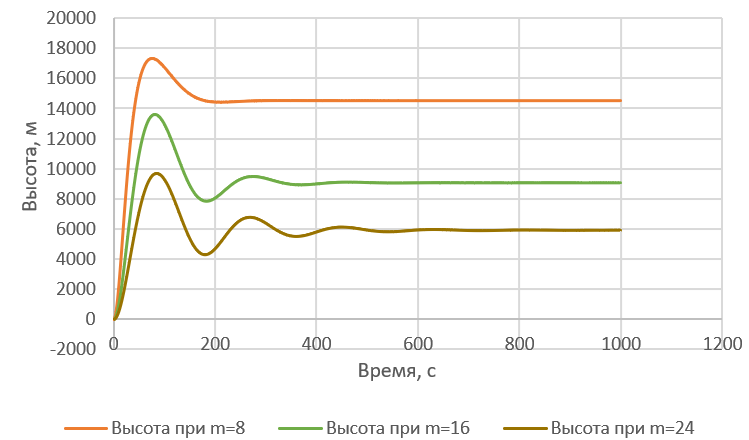


Рисунок 3 — Графики изменения угла при различных значениях

Можем наблюдать, что чем больше масса тем ниже шар и дольше стабилизируется к установившемуся значению.

Также проверим работу системы при различных начальных значениях. На рисунке 4 показаны графики при начальных условиях , и при массе .

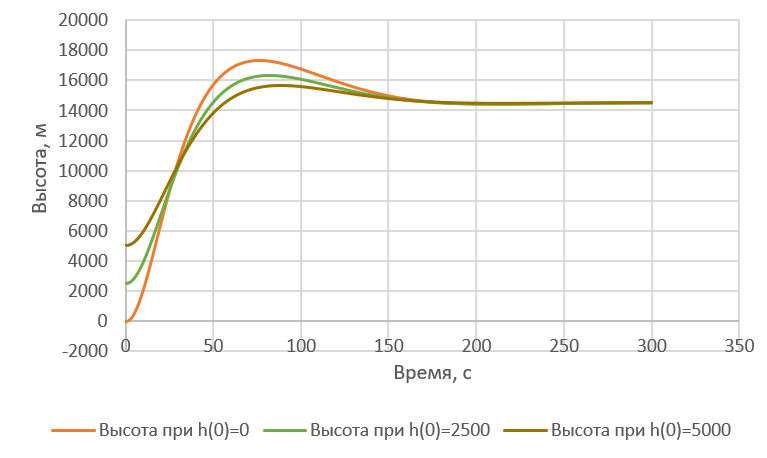


Рисунок 4 — Графики изменения высоты при различных начальных значениях

Видим, что независимо от начальной высоты, при прочих равных значениях, шар придёт к одному и тому же установившемуся значению.

# **10. Уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.**

Установившимся называют такой режим, при котором интересующая нас выходная величина не изменяется с течением времени.

Определим установившийся режим. Чтобы найти условия установившегося режима, приравняем все производные выходной величины к нулю.

Исходное уравнение динамики:

.

Установившийся режим:

;

Выразим высоту:

При изменении объема на величину будет изменяться и высота на некоторую величину . Используя это, представим наши мгновенные значения величин и в виде: и где , — опорные значения, а , — отклонения от опорных значений.

Подставим эти равенства в наше уравнение динамики. Искомое уравнение будет иметь вид:

# **11. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.**

Линеаризация — это процесс сведения нелинейного уравнения к линейному путём отбрасывания всех членов, имеющих порядок выше первой.

Разложим в ряд Тейлора экспоненту:

+…

Или же:

+

Сделаем замену. Получим:

;

Преобразуем его:

Так как ( ,то мы можем упростить наше уравнение:

;

Раскроем скобки:

Перенесём выходные величины в левую сторону, а входные — в правую. Искомое уравнение будет иметь вид:

.

# **12. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в относительных безразмерных величинах.**

Изначально имеем:

.

Делим и умножаем и на соответствующие им величины:

Разделим получившееся уравнение на :

Разделим получившееся уравнение на M:

Разделим все слагаемые на коэффициент перед :

;

Получаем:

.

# **13. Передаточная функция системы.**

Передаточная функция динамической системы — это отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях.

;

Введём оператор и сделаем замены , .

Получим:

;

Для повышения компактности записи, введём следующие обозначения:

Тогда приведённое выше уравнение можно будет записать в виде:

Откуда, приведя подобные, получим:

Передаточную функцию найдём по формуле:

Укажем конкретные числовые значения параметров:

Масса шара ;

;

Плотность воздуха ;

Коэффициент сопротивления воздуху.

можно найти из уравнения .

Передаточная функция будем иметь вид:

# **14. Переходная и весовая характеристики системы.**

Переходной характеристикой называется реакция системы на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях.

Весовой характеристикой называется реакция системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях

1. Определим реакцию системы на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях. Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

— единичный ступенчатый сигнал (функция Хэвисайда)

Его изображение по Лапласу:

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

Найдём выражение для выходного сигнала.

Разложим дробь:

Её оригинал:

Разложим дробь :

Её оригинал:

Оригинал функции :

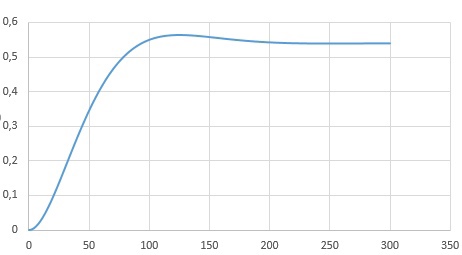


Рисунок 5 — График реакции на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях в Excel.

Проверим соответствует ли действительности этот график используя инструментарий MatLab.

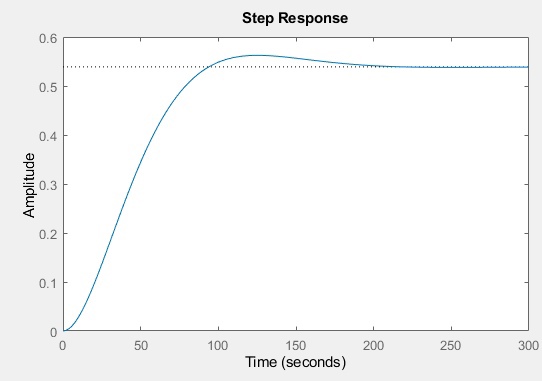


Рисунок 5 — График реакции на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях в MatLab.

2. Определим реакцию системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях. Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

— дельта-функция (функция Дирака)

Его изображение по Лапласу:

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

Найдём выражение для выходного сигнала.

Разложим дробь:

Оригинал функции :

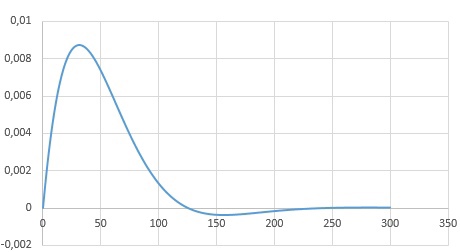


Рисунок 6 — График реакции на дельта-функцию при нулевых начальных условиях в Excel.

Проверим соответствует ли действительности этот график используя инструментарий MatLab.

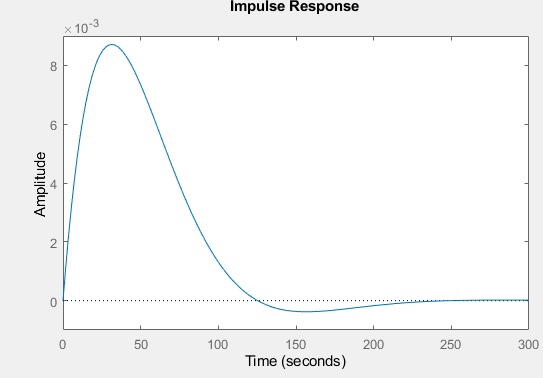


Рисунок 7 — График реакции на дельта-функцию при нулевых начальных условиях в Matlab

# **15. Показатели качества переходного процесса.**

Оценим эффективность функционирования динамической системы, используя прямые показатели качества. Для их нахождения целесообразно будет использовать пакет MATLAB.

**1) Перерегулирование**

Перерегулирование — это отношение разности максимального значения переходной характеристики и её установившегося значения к величине установившегося значения выраженная в процентах.

.

Найдём значение перерегулирования:

**2) Время переходного процесса**

Время переходного процесса — это момент времени, после которого отклонения переходной характеристики не будут превышать от установившегося значения секунд.

**3) Время нарастания переходного процесса**

Время нарастания переходного процесса — это абсцисса точки пересечения переходной характеристики с уровнем установившегося значения